



TITLE:

Balanced 2^m Fractional Factorial Designをめぐって (群論と組み合わせ論)

AUTHOR(S):

白倉, 暉弘; 桑田, 正秀; 山本, 純恭

CITATION:

白倉, 暉弘 ...[et al]. Balanced 2^m Fractional Factorial Designをめぐって (群論と組み合わせ論). 数理解析研究所講究録 1973, 178: 9-17

ISSUE DATE:

1973-05

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/107110>

RIGHT:

Balanced 2^m Fractional Factorial Design をめぐって

岡山理大 白倉 暉弘

広大理 栗田 正秀

広大理 山本 純恭

§1. 序

Balanced array の概念は Chakravarti [1] によって partially balanced array として導入され、最近 2^m fractional factorial (f.f.) design の重要な subclass として注目されるようになった、それは orthogonal array を用いる design のように、母数の推定値が互に独立という性質はもたないまでも、推定値の分散行列が比較的簡単な構造をもつという点と、制約条件が弱いという点で、存在の可能性が広いという利点をもつからである。

Fractional factorial design には、その“よさ”を測る一つの尺度として分解能 (resolution) がある。いわゆる主効果、2 因子交互作用、3 因子交互作用等が、どの程度分

解して推定することが可能かということである。たとえば, resolution V の design とは, 2 因子交互作用までが互に交絡しない design のことである。

Balanced 2^m f. f. design をめぐる最近の研究は, Srivastava [2][3], Srivastava, Chopra [4][5] 等がある。この研究をめぐる重要な問題を要約すると,

①, resolution III, IV, V の f. f. design について, design が balanced であることと (定義は省略するが, 母数の推定値の分散行列がある種の単純な形であること), 処理組合せの作る array が strength 2, 3, 4 の balanced array であることの同等性が一般に成り立つか?

②, Balanced design の Information 行列 M , とくにその逆行列 M^{-1} (母数の推定値の分散行列) の固有値が一般的に求まるか?

③, Balanced design の存在条件と構成方法はあるか?

問題①については, 一般に 2^m f. f. design が resolution $2l+1$ の balanced であるための必要十分条件は, design が strength $2l$ の balanced array であることが示された [6]。

問題②については, resolution V (strength 4) の場合に

ついて Srivastana, Chopra [5] が解決した。白倉は、同様の方法により resolution VII (strength 6) の場合について求めた。最近、われわれは、これらの方法を改良し、リージョンシップ代数の構造分析を通じて、かなり直接的かつ一般性のある求め方を見出した。詳細は別途発表の予定である。

問題③は、この報告でとりあげるものである。Srivastana [3] は strength t , constraints $m=t+1, t+2$ の balanced array の存在するための一つの必要十分条件を構成的に与えている。われわれはこの結果を拡張して、strength t , constraints $m=t+3$ の balanced array の存在するための一つの必要十分条件を構成的に与える。

§2. Balanced array の定義

$(0,1)$ -行列, $T(m \times n)$ の任意の t 個の行からなる sub-array $T_0(t \times n)$ において weight i ($i=0,1,\dots,t$) のベクトルがいずれも T_0 の列に μ_i 回現われるとき, T は size n , strength t , constraints m , index set $(\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_t)$ の balanced array (B-array) という。あきらかに

$$n = \binom{t}{0} \mu_0 + \binom{t}{1} \mu_1 + \dots + \binom{t}{t} \mu_t$$

である。

とくに $\mu_0 = \mu_1 = \dots = \mu_t = \lambda$ のとき, T は size n , strength t , constraints m , index λ の orthogonal array と言う。

[B-array の存在]

$\Omega(m, k)$ を weight k の $(0, 1)$ ベクトルを $\binom{m}{k}$ 個すべて並べてできる $m \times \binom{m}{k}$ 行列とする。 $\Omega(m, k)$ をそれぞれ S_k 個 ($k=0, \dots, m$) 横に並べてできる $m \times \left\{ \sum_{k=0}^m S_k \binom{m}{k} \right\}$ 行列を T とする。そのとき, T は strength t , constraints m , index $\mu_i = \sum_{k=0}^m S_k \binom{m-t}{k-i}$ ($i=0, 1, \dots, t$) の B-array となる。

§3. strength t , constraints $m \leq t+3$ の B-array の存在するための必要十分条件とその構成法。

記号として, $\lambda(T)$ を T の列ベクトルでその要素がすべて 1 であるベクトルの個数。 T_l ($l=1, 2, 3$) を $(t+l) \times n$ の $(0, 1)$ -行列とする。 $v^{(l)}(i_1, i_2, \dots, i_k)$ を T_l の列ベクトルで i_1, i_2, \dots, i_k 番目は 0, その他はすべて 1 であるベクトルの個数とする。

[定理 1] $d^{(i)} = \lambda(T_i)$ とする, そのとき T_i が strength t , index set (μ_0, \dots, μ_t) の B-array であるための必要十分条件は,

(i). $d^{(i)} \geq 0$ なる整数

$$(ii) \quad \psi_{11} \leq d^{(1)} \leq \psi_{12}$$

となることである。ただし,

$$\psi_{11} = \max_{1 \leq 2r \leq t+1} \left(\sum_{g=0}^{2r-1} (-1)^{g+1} \mu_{t-(2r-1)+g} \right)$$

$$\psi_{12} = \min_{1 \leq 2r+1 \leq t+1} \left(\sum_{g=0}^{2r} (-1)^g \mu_{t-2r+g} \right)。$$

構成方法として,

$$v^{(1)}(i_1, \dots, i_k) = \sum_{g=0}^{k-1} (-1)^g \mu_{t-(k-1)+g} + (-1)^k d^{(1)}$$

とすればよい。

[定理 2] $d^{(2)} = \lambda(T_2)$, $d_i^{(1)} = \lambda(T_{2i})$ とする, ただし T_{2i} は T_2 の i 行を除いてできる $(t+1) \times n$ 行列。そのとき T_2 が set-length t , index set (μ_0, \dots, μ_t) の B-array であるための必要十分条件は,

$$(i) \quad d^{(2)}, d_i^{(1)} \geq 0 \text{ なる整数, } i=1, \dots, t+2$$

$$(ii) \quad \psi_{11} \leq d_i^{(1)} \leq \psi_{12}$$

$$(iii) \quad \psi_{21} \leq d^{(2)} \leq \psi_{22}$$

となることである。ただし,

$$\psi_{21} = \max_{1 \leq 2r \leq t+2} \left\{ \sum_{g=0}^{2r-1} (-1)^g \mu_{t-(2r-1)+g} + \max_{(i_1, \dots, i_{2r}) \in \Omega_2} \left(\sum_{\alpha=1}^{2r} d_{i_\alpha}^{(1)} \right) \right\}$$

$$\psi_{22} = \min_{1 \leq 2r+1 \leq t+2} \left\{ \sum_{g=0}^{2r} (-1)^{g+1} \mu_{t-2r+g} + \min_{(i_1, \dots, i_{2r+1}) \in \Omega_2} \left(\sum_{\alpha=1}^{2r+1} d_{i_\alpha}^{(1)} \right) \right\}$$

(ただし, $\Omega_2 = \{1, 2, \dots, t+2\}$)。

構成方法として

$$v^{(2)}(i_1, \dots, i_k) = \sum_{g=0}^{k-1} (-1)^{g+1} \mu_{t-(k-1)+g} - (-1)^k \sum_{\alpha=1}^k d_{i_\alpha}^{(1)} + (-1)^k d^{(2)}$$

とすればよい。

[定理 3] $d^{(3)} = \lambda(T_3)$, $d_i^{(2)} = \lambda(T_3 i)$, $d_{ij} = \lambda(T_3 i j)$ とする,
 ただし, $T_3 i$ は T_3 の i 行を除いてできる $(t+2) \times n$ 行列, $T_3 i j$
 は T_3 の i, j 行を除いてできる $(t+1) \times n$ 行列. そのとき T_3 が
 strength t , index set (μ_0, \dots, μ_t) の B-array であるための
 必要十分条件は,

- (i) $d^{(3)}, d_i^{(2)}, d_{ij} \geq 0$ なる整数, $i, j = 1, \dots, t+3; i < j$
- (ii) $\psi_{11} \leq d_{ij} \leq \psi_{12}$
- (iii) $\psi_{21}^{(i)} \leq d_i^{(2)} \leq \psi_{22}^{(i)}$
- (iv) $\psi_{31} \leq d^{(3)} \leq \psi_{32}$

となることである. ただし,

$$\begin{aligned} \psi_{21}^{(i)} &= \max_{1 \leq 2r \leq t+2} \left\{ \sum_{g=0}^{2r-1} (-1)^g \binom{g}{2} \mu_{t-(2r-1)+g} + \max_{(j_1, \dots, j_{2r}) \in \Omega_3} \left(\sum_{\substack{\alpha=1 \\ i \neq j_\alpha}}^{2r} d_{i, j_\alpha} \right) \right\} \\ \psi_{22}^{(i)} &= \min_{1 \leq 2r+1 \leq t+2} \left\{ \sum_{g=0}^{2r} (-1)^{g+1} \binom{g}{2} \mu_{t-2r+g} + \min_{(j_1, \dots, j_{2r+1}) \in \Omega_3} \left(\sum_{\substack{\alpha=1 \\ i \neq j_\alpha}}^{2r+1} d_{i, j_\alpha} \right) \right\} \\ \psi_{31} &= \max_{1 \leq 2r \leq t+3} \left\{ \sum_{g=0}^{2r-1} (-1)^{g+1} \binom{g}{2} \mu_{t-(2r-1)+g} + \max_{(i_1, \dots, i_{2r}) \in \Omega_3} \left(\sum_{\substack{\alpha=1 \\ i_\alpha \neq i_\beta}}^{2r} d_{i_\alpha}^{(2)} - \sum_{\substack{\alpha < \beta \\ i_\alpha \neq i_\beta}}^{2r} d_{i_\alpha, i_\beta} \right) \right\} \\ \psi_{32} &= \min_{1 \leq 2r+1 \leq t+3} \left\{ \sum_{g=0}^{2r} (-1)^g \binom{g}{2} \mu_{t-2r+g} + \min_{(i_1, \dots, i_{2r+1}) \in \Omega_3} \left(\sum_{\alpha=1}^{2r+1} d_{i_\alpha}^{(2)} - \sum_{\substack{\alpha < \beta \\ i_\alpha \neq i_\beta}}^{2r+1} d_{i_\alpha, i_\beta} \right) \right\} \end{aligned}$$

(ただし $\Omega_3 = \{1, 2, \dots, t+3\}$).

構成方法として,

$$v^{(3)}(i_1, \dots, i_k) = \sum_{g=0}^{k-1} (-1)^g \binom{g}{2} \mu_{t-(k-1)+g} + (-1)^k \sum_{\substack{\alpha < \beta \\ i_\alpha \neq i_\beta}}^k d_{i_\alpha, i_\beta} - (-1)^k \sum_{\alpha=1}^k d_{i_\alpha}^{(2)} + (-1)^k d^{(3)}$$

とすればよい。

[証明] T_3 が B-array であるとするとき, $T_3 i$, $T_3 i j$ とそれぞれ
 $m=t+2$, $m=t+1$, の B-array であり, [定理 1, 2] より d_{ij}
 $d_i^{(2)}$ は (ii), (iii) を満たさねばならぬ. よって T_3 が B-array である

というとき, (ii), (iii) を満たす非負整数 $d_{ij}, d_i^{(2)}$ に対してつぎの条件を満たす非負整数 $\nu^{(3)}(i_1, \dots, i_k)$ が存在することと同値である。

$$\nu^{(3)}(i_1) + d^{(3)} = d_{i_1}^{(2)}$$

$$\nu^{(3)}(i_1, i_2) + \nu^{(3)}(i_1) + \nu^{(3)}(i_2) + d^{(3)} = d_{i_1, i_2}$$

$$\begin{aligned} & \nu^{(3)}(i_1, i_2, i_3) + \nu^{(3)}(i_1, i_2) + \nu^{(3)}(i_1, i_3) + \nu^{(3)}(i_2, i_3) + \nu^{(3)}(i_1) + \nu^{(3)}(i_2) + \nu^{(3)}(i_3) \\ & + d^{(3)} = \mu_t \end{aligned}$$

$4 \leq k \leq t+3$ に対して,

$$\begin{aligned} & \nu^{(3)}(i_1, i_2, i_3, i_4, \dots, i_k) + \nu^{(3)}(i_1, i_2, i_4, \dots, i_k) + \nu^{(3)}(i_1, i_3, i_4, \dots, i_k) \\ & + \nu^{(3)}(i_2, i_3, i_4, \dots, i_k) + \nu^{(3)}(i_1, i_4, \dots, i_k) + \nu^{(3)}(i_2, i_4, \dots, i_k) \\ & + \nu^{(3)}(i_3, i_4, \dots, i_k) + \nu^{(3)}(i_4, \dots, i_k) = \mu_{t-(k-3)} \end{aligned}$$

上の式をとくと,

$$\nu^{(3)}(i_1, \dots, i_k) = \sum_{g=0}^{k-1} (-1)^g \binom{k}{g} \mu_{t-(k-1)+g} + (-1)^k \sum_{\substack{\alpha, \beta=1 \\ \alpha < \beta}}^k d_{i_\alpha, i_\beta} - (-1)^k \sum_{\alpha=1}^k d_{i_\alpha}^{(2)} + (-1)^k d^{(3)},$$

$(1 \leq k \leq t+3)$.

$\nu^{(3)}(i_1, \dots, i_k) \geq 0$ は (iv) と同値である。

[例]

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

この行列は $t=2, m=5, \text{index set}(2, 3, 2)$ の B-array

である。この行列の列として、列ベクトル $(0, \dots, 0)$, $(1, \dots, 1)$ をつけ加えれば, index $\lambda=3$ の orthogonal array となる。

References

- [1] Chakravarti, I. M. (1956). Fractional replication in asymmetrical factorial designs and partially balanced arrays. *Sankhya* 17 143~164
- [2] Srivastava, J. N. (1970). Optimal balanced 2^m fractional factorial designs. S. N. Roy Memorial Volume. Univ. of North Carolina. and Indian Statistical Institute 689~706
- [3] Srivastava, J. N. (1972). Some general existence condition for balanced array of strength t and 2 symbols. *Jour. Comb. Th.*, 13
- [4] Srivastava, J. N. and Chopra, D. V. (1971). Optimal balanced 2^m fractional factorial designs $m \leq 6$. *Technometrics*, Vol 13 No 2 257~269
- [5] Srivastava, J. N. and Chopra, D. V. (1971). On the characteristics roots of the information

matrix of 2^m balanced factorial designs of resolution V , with applications. Ann. Math. Statist. 42 722~734

- [6] 栗田, 白倉, 山本. 2^m balanced fractional factorial design について. 「実験計画法」に関するシンポジウム予稿集. 1973, 1/11~12. 広島大学において